Олимпиада ФМШ по математике

Осень–2007

10 класс

10.1.

10.2. Существует ли прямоугольный треугольник, длины сторон которого — простые числа?

10.3. а) В стране некоторые пары городов соединены дорогами с двусторонним движением. Пусть N — общее количество дорог. Верно ли, что все дороги можно так перенумеровать числами 1, …, N, чтобы номера дорог, выходящих из любой наперёд заданной вершины, были взаимно просты в совокупности?
б) Тот же вопрос для случая, когда дороги с односторонним движением.

10.4. Пусть O — центр описанной окружности треугольника ABC. Окружность, описанная около треугольника AOB, вторично пересекает прямую AC в точке A'. Окружность, описанная около треугольника COB, вторично пересекает прямую AC в точке C'. Докажите, что если угол $\angle ABC$ тупой, то $A'C' < AC/2$.

10.5. Из колоды в 36 карт выкладывают на стол по одной карте. Очередную карту можно выложить, только если с ней совпадает по масти или по достоинству чётное число карт на столе. (Так, туз пик можно выложить, когда на столе лежат, например, ровно три пиковые карты и ровно один туз.) Какое наибольшее число карт может быть выложено?

Олимпиада ФМШ по математике

Осень–2007

11 класс

11.1. Решите в целых положительных числах уравнение

$$x! + y! = z! + 2.$$

11.2. Министерство культуры опубликовало полный список нецензурных слов. Обозначим через x_n количество всех слов длины n, не содержащих нецензурных подслов. (*Словом* считается любая конечная последовательность букв, необязательно осмысленная.) Оказалось, что при всех $n \geq 2007$ выполнено неравенство $x_n \leq n$. Докажите, что тогда последовательность $\{x_n\}$ ограничена.

11.3. Пусть a, b, c — стороны некоторого треугольника, лежащие против углов α, β, γ соответственно; h_a, h_b, h_c — его высоты, опущенные на стороны a, b, c соответственно. Докажите неравенство

$$a \sin\alpha + b \sin\beta + c \sin\gamma \geq h_a + h_b + h_c.$$

11.4. Пусть O — центр описанной окружности треугольника ABC. Окружность, описанная около треугольника AOB, вторично пересекает прямую AC в точке A'. Окружность, описанная около треугольника COB, вторично пересекает прямую AC в точке C'.
а) Докажите, что если угол $\angle ABC$ тупой, то $A'C' < AC/2$.
б) Докажите, что $A'C' = AC/2$ тогда и только тогда, когда

$$\operatorname{tg}(\angle ABC) = \operatorname{tg}(\angle CAB) + \operatorname{tg}(\angle ACB).$$

11.5. Даны $2n$ попарно различных чисел $a_1, \ldots, a_n, b_1, \ldots, b_n$. Таблица $n \times n$ заполнена по следующему правилу: в клетке, расположенной на пересечении i-й строки и j-го столбца, записано число $a_i + b_j$. Докажите, что если во всех столбцах произведения чисел равны между собой, то во всех строках произведения тоже равны между собой.