# Олимпиада ФМШ по математике

Весна–2008

## 10 класс

**10.1.** а) Можно ли квадрат разрезать на три многоугольника, равных по периметру?
б) Можно ли квадрат разрезать на три многоугольника, равных по периметру, но неравных по площади?
в) Можно ли правильную пятиконечную звезду разрезать на три многоугольника, равных по периметру?

**10.2.** Положительные действительные числа $x$, $y$, $z$ таковы, что $xyz = 1$. Докажите неравенство

$$\frac{1}{x^2+y^2}+\frac{1}{y^2+z^2}+\frac{1}{z^2+x^2} \le \frac{x+y+z}{2}.$$

**10.3.** Пусть $H$ — ортоцентр треугольника $ABC$. На описанной окружности треугольника $AHC$ произвольно выбрана точка $P$. Пусть $A'$ — точка пересечения прямых $AP$ и $BC$; $C'$ — точка пересечения прямых $CP$ и $AB$.
а) Докажите, что отношение длин отрезков $AA'/BB'$ не зависит от выбора точки $P$.
б) Найдите геометрическое место точек середин отрезков $A'B'$.

**10.4.** По краю шахматной доски $8 \times 8$ стоит 28 слонов. За какое наименьшее число ходов их можно переставить так, чтобы они по-прежнему стояли по краю доски, но никакой слон не остался стоять на своей клетке?


# Олимпиада ФМШ по математике

Весна–2008


## 11 класс

**11.1.** Можно ли квадрат разрезать на три многоугольника, равных по периметру, но неравных по площади?

**11.2.** Положительные действительные числа $x$, $y$, $z$ таковы, что $xyz = 1$. Докажите неравенство

$$\frac{1}{x^2+y^2}+\frac{1}{y^2+z^2}+\frac{1}{z^2+x^2} \le \frac{x+y+z}{2}.$$

**11.3.** Назовём два неравных треугольника *похожими*, если можно обозначить их $ABC$ и $A'B'C'$ таким образом, чтобы выполнялись равенства $AB = A'B'$, $AC = A'C'$ и $\angle B = \angle B'$. Существуют ли три попарно похожих треугольника?

**11.4.** Каждой прямой $l$ на плоскости сопоставили окружность $\omega(l)$, которая касается $l$. Может ли так быть, что для любых различных прямых $l$ и $m$ окружности $\omega(l)$ и $\omega(m)$ всегда различны?

**11.5.** По краю шахматной доски $8 \times 8$ стоит 28 слонов. За какое наименьшее число ходов их можно переставить так, чтобы они по-прежнему стояли по краю доски, но никакой слон не остался стоять на своей клетке?