

## Заключительный этап Всесибирской олимпиады школьников по математике 2010 г.

Время выполнения 4 астрономических часа

Каждая задача оценивается 7 баллами

### 9 класс

1. Назовём *перегородкой* произвольную сторону некоторого единичного квадратика на клетчатом листе бумаги. Можно ли отметить в квадрате 7 на 7 клеток несколько непересекающихся перегородок так, чтобы проекции всех отмеченных перегородок на горизонтальную и вертикальную стороны квадрата полностью их покрывали? Перегородки не пересекаются, если не имеют общих точек (концов). Отмеченные перегородки могут располагаться как внутри квадрата 7 на 7, так и на его границе.
2. Из горячего крана ванна заполняется за 23 минуты, из холодного – за 17 минут. Петя сначала открыл горячий кран. Через сколько минут он должен открыть холодный, чтобы к моменту наполнения ванны горячей воды налил в полтора раза больше, чем холодной?
3. Найти все решения системы уравнений:  $x + y = 4, (x^2 + y^2)(x^3 + y^3) = 280$ .
4. Пусть  $ABCD$  - параллелограмм, вписанная в треугольник  $ABD$  окружность касается сторон  $AB$  и  $AD$  соответственно в точках  $M$  и  $N$ , вписанная в треугольник  $ACD$  окружность касается сторон  $AD$  и  $DC$  соответственно в точках  $P$  и  $Q$ . Доказать, что прямые  $MN$  и  $PQ$  перпендикулярны.
5. При каких натуральных  $n$  доску размера  $n$  на  $n$  клеток можно разбить по линиям сетки на домино размера 1 на 2 клетки так, чтобы вертикальных и горизонтальных домино было поровну?
6. Среди всех натуральных чисел от 1 до 20 включительно некоторые 10 чисел окрасили в синий цвет, а остальные 10 – в красный, затем подсчитали все возможные суммы пар чисел, одно из которых синее, а другое - красное. Какое максимальное количество различных может быть среди ста полученных чисел?

## Заключительный этап Всесибирской олимпиады школьников по математике 2010 г.

Время выполнения 4 астрономических часа

Каждая задача оценивается 7 баллами

### 9 класс

1. Назовём *перегородкой* произвольную сторону некоторого единичного квадратика на клетчатом листе бумаги. Можно ли отметить в квадрате 7 на 7 клеток несколько непересекающихся перегородок так, чтобы проекции всех отмеченных перегородок на горизонтальную и вертикальную стороны квадрата полностью их покрывали? Перегородки не пересекаются, если не имеют общих точек (концов). Отмеченные перегородки могут располагаться как внутри квадрата 7 на 7, так и на его границе.
2. Из горячего крана ванна заполняется за 23 минуты, из холодного – за 17 минут. Петя сначала открыл горячий кран. Через сколько минут он должен открыть холодный, чтобы к моменту наполнения ванны горячей воды налил в полтора раза больше, чем холодной?
3. Найти все решения системы уравнений:  $x + y = 4, (x^2 + y^2)(x^3 + y^3) = 280$ .
4. Пусть  $ABCD$  - параллелограмм, вписанная в треугольник  $ABD$  окружность касается сторон  $AB$  и  $AD$  соответственно в точках  $M$  и  $N$ , вписанная в треугольник  $ACD$  окружность касается сторон  $AD$  и  $DC$  соответственно в точках  $P$  и  $Q$ . Доказать, что прямые  $MN$  и  $PQ$  перпендикулярны.
5. При каких натуральных  $n$  доску размера  $n$  на  $n$  клеток можно разбить по линиям сетки на домино размера 1 на 2 клетки так, чтобы вертикальных и горизонтальных домино было поровну?
6. Среди всех натуральных чисел от 1 до 20 включительно некоторые 10 чисел окрасили в синий цвет, а остальные 10 – в красный, затем подсчитали все возможные суммы пар чисел, одного из которых синее, а другое - красное. Какое максимальное количество различных может быть среди ста полученных чисел?

**Заключительный этап Всесибирской олимпиады школьников по математике 2010 г.**

*Время выполнения 4 астрономических часа*

*Каждая задача оценивается 7 баллами*

**10 класс**

1. Назовём *перегородкой* произвольную сторону некоторого единичного квадратика на клетчатом листе бумаги. Можно ли отметить в квадрате 7 на 7 клеток несколько непересекающихся перегородок так, чтобы проекции всех отмеченных перегородок на горизонтальную и вертикальную стороны квадрата полностью их покрывали? Перегородки не пересекаются, если не имеют общих точек (концов).
2. Известно, что 70 коров съели бы всю траву на лугу за 24 дня, а 30 коров – за 60 дней. Сколько коров съели бы траву на лугу за 96 дней? Помните, что трава на лугу всё время подрастает с постоянной скоростью.
3. Пусть числа  $x$  и  $y$  удовлетворяют соотношению  $x^2 - y^2 + 6x + 4y + 5 = 0$ . Найти минимум значения выражения  $x^2 + y^2$ .
4. В клетках квадрата 6 на 6 записаны в некотором порядке все натуральные числа от 1 до 36 включительно, по одному в клетке. Доказать, что всегда найдутся 4 клетки, образующие квадрат 2 на 2, сумма чисел в которых является чётным числом. Построить пример такой расстановки, чтобы только в одном из всех квадратов 2 на 2 сумма чисел была чётной.
5. В окружности проведены хорды  $AB$  и  $AC$ , биссектриса угла  $BAC$  пересекает окружность в точке  $D$ , точка  $E$  - основание перпендикуляра из  $D$  на прямую  $AB$ . Доказать, что длина  $AE$  равна полусумме длин  $AB$  и  $AC$ .
6. Найти максимально возможное количество подмножеств одиннадцатиеlementного множества таких, что все они содержат разное число элементов и ни одно из них не содержится полностью в объединении остальных.

**Заключительный этап Всесибирской олимпиады школьников по математике 2010 г.**

*Время выполнения 4 астрономических часа*

*Каждая задача оценивается 7 баллами*

**10 класс**

1. Назовём *перегородкой* произвольную сторону некоторого единичного квадратика на клетчатом листе бумаги. Можно ли отметить в квадрате 7 на 7 клеток несколько непересекающихся перегородок так, чтобы проекции всех отмеченных перегородок на горизонтальную и вертикальную стороны квадрата полностью их покрывали? Перегородки не пересекаются, если не имеют общих точек (концов).
2. Известно, что 70 коров съели бы всю траву на лугу за 24 дня, а 30 коров – за 60 дней. Сколько коров съели бы траву на лугу за 96 дней? Помните, что трава на лугу всё время подрастает с постоянной скоростью.
3. Пусть числа  $x$  и  $y$  удовлетворяют соотношению  $x^2 - y^2 + 6x + 4y + 5 = 0$ . Найти минимум значения выражения  $x^2 + y^2$ .
4. В клетках квадрата 6 на 6 записаны в некотором порядке все натуральные числа от 1 до 36 включительно, по одному в клетке. Доказать, что всегда найдутся 4 клетки, образующие квадрат 2 на 2, сумма чисел в которых является чётным числом. Построить пример такой расстановки, чтобы только в одном из всех квадратов 2 на 2 сумма чисел была чётной.
5. В окружности проведены хорды  $AB$  и  $AC$ , биссектриса угла  $BAC$  пересекает окружность в точке  $D$ , точка  $E$  - основание перпендикуляра из  $D$  на прямую  $AB$ . Доказать, что длина  $AE$  равна полусумме длин  $AB$  и  $AC$ .
6. Найти максимально возможное количество подмножеств одиннадцатиеlementного множества таких, что все они содержат разное число элементов и ни одно из них не содержится полностью в объединении остальных.

**Заключительный этап Всесибирской олимпиады школьников по математике 2010 г.**

*Время выполнения 4 астрономических часа*

*Каждая задача оценивается 7 баллами*

**11 класс**

1. В лесу собрали 36 грибов - рыжиков, груздей и подберёзовиков. Известно, что среди любых 25 из этих грибов не меньше 5 груздей, среди любых 27 – не меньше 2 рыжиков, а среди любых 31 гриба не меньше 4 подберёзовиков. Найти число грибов каждого вида.
2. В трапеции углы при большем основании равны 20 и 70 градусов, длина средней линии равна 18 см, а отрезка, соединяющего середины оснований - 6 см. Найти длину отрезка, проходящего через точку пересечения диагоналей трапеции параллельно её основаниям с концами на боковых сторонах.
3. Найти множество точек  $M$  первой четверти координатной плоскости таких, что через  $M$  можно провести прямую, отсекающую от первой четверти треугольник единичной площади.
4. Через некоторую точку плоскости проходят четыре различные прямые  $l, m, n$  и  $p$ , они обозначены по часовой стрелке. Известно, что угол между  $l$  и  $m$  равен углу между  $n$  и  $p$ . Из произвольной точки  $A$  плоскости, не принадлежащей этим прямым, на прямые  $l, m, n$  и  $p$  опустили перпендикуляры  $AL, AM, AN$  и  $AP$  соответственно. Доказать, что прямые  $LP$  и  $MN$  параллельны.
5. Пусть функция  $f(x)$  определена на всей числовой прямой и для всех действительных чисел  $x$  выполнено равенство  $f(f(x)) = 5x + 4$ . Найти  $f(-1)$ .
6. В десятиэлементном множестве произвольным образом отмечены несколько подмножеств, сумма количеств элементов во всех них равна 31. Доказать, что одно из этих подмножеств обязательно содержится в объединении остальных. (Не путать сумму количеств элементов во всех множествах и количество элементов в их объединении).

**Заключительный этап Всесибирской олимпиады школьников по математике 2010 г.**

*Время выполнения 4 астрономических часа*

*Каждая задача оценивается 7 баллами*

**11 класс**

1. В лесу собрали 36 грибов - рыжиков, груздей и подберёзовиков. Известно, что среди любых 25 из этих грибов не меньше 5 груздей, среди любых 27 – не меньше 2 рыжиков, а среди любых 31 гриба не меньше 4 подберёзовиков. Найти число грибов каждого вида.
2. В трапеции углы при большем основании равны 20 и 70 градусов, длина средней линии равна 18 см, а отрезка, соединяющего середины оснований - 6 см. Найти длину отрезка, проходящего через точку пересечения диагоналей трапеции параллельно её основаниям с концами на боковых сторонах.
3. Найти множество точек  $M$  первой четверти координатной плоскости таких, что через  $M$  можно провести прямую, отсекающую от первой четверти треугольник единичной площади.
4. Через некоторую точку плоскости проходят четыре различные прямые  $l, m, n$  и  $p$ , они обозначены по часовой стрелке. Известно, что угол между  $l$  и  $m$  равен углу между  $n$  и  $p$ . Из произвольной точки  $A$  плоскости, не принадлежащей этим прямым, на прямые  $l, m, n$  и  $p$  опустили перпендикуляры  $AL, AM, AN$  и  $AP$  соответственно. Доказать, что прямые  $LP$  и  $MN$  параллельны.
5. Пусть функция  $f(x)$  определена на всей числовой прямой и для всех действительных чисел  $x$  выполнено равенство  $f(f(x)) = 5x + 4$ . Найти  $f(-1)$ .
6. В десятиэлементном множестве произвольным образом отмечены несколько подмножеств, сумма количеств элементов во всех них равна 31. Доказать, что одно из этих подмножеств обязательно содержится в объединении остальных. (Не путать сумму количеств элементов во всех множествах и количество элементов в их объединении).