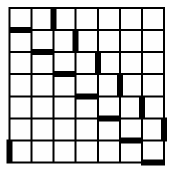
Решения задач
заключительного этапа Всесибирской олимпиады школьников по математике 2009/2010 г.г.

Общие принципы оценивания. Полное решение каждой задачи оценивается 7 баллами. При наличии неполного решения исходим из степени продвижения. Частные случаи и соображения оцениваются от 0 до 1 балла. Явно высказанная в тексте идея решения, которая может быть доведена до конца, оценивается от 2 до 3 баллов. Более или менее верное решение с существенными недочётами, типа упущения какого–то случая. оценивается от 4 до 5 баллов. Верное и полное решение с мелкими недочётами типа арифметических ошибок, оценивается 6 баллами. Верное и полное решение без каких–либо ошибок оценивается 7 баллами.
После каждой задачи приведены некоторые критерии её оценивания.

9 класс

9.1. Ответ. Можно, например так, как показано на рисунке справа.



Имеется множество других способов, в том числе когда все отмеченные перегородки лежат внутри квадрата, достаточно привести любой из них.
Замечания по оцениванию. Любой правильный ответ оценивается в 7 баллов. Если в ответе проекции перегородок не закрывают всего один отрезок на одной из сторон, оцениваем в 1 балл. Остальное 0 баллов.

9.2. Ответ. Через 7 минут.

За одну минуту горячий кран заполняет $\frac{1}{23}$ часть ванны, а холодный $\frac{1}{17}$ часть. После наполнения ванны горячая вода должна составлять $\frac{3}{5}$ ванны, а холодная $\frac{2}{5}$ ванны. Следовательно, горячий кран должен быть открыт $\frac{3}{5}\Big/\frac{1}{23}=\frac{69}{5}$ минуты, а холодный $\frac{2}{5}\Big/\frac{1}{17}=\frac{34}{5}$ минуты. Значит, холодный кран должен быть открыт через $\frac{69}{5}-\frac{34}{5}=7$ минут, после открытия горячего.
Замечания по оцениванию. Если ответ только угадан, ставим 0 баллов. Если ответ угадан и аккуратно проверена его правильность, ставим 3 балла. Правильно составлено уравнение или система, но решено с ошибками, ставим от 4 до 6 баллов в зависимости от типа ошибки.

9.3. Ответ. $(3,1)$ и $(1,3)$.
Из условия $x+y=4$ - не равно 0, поэтому во втором уравнении можно сократить $x+y=4$, получив $(x^2+y^2)(x^2-xy+y^2)=70$. Далее, возводя первое уравнение в квадрат, получим $x^2+y^2=16-2xy$. Подставим во второе, получим $3(xy)^2-40xy+93=0$, откуда $xy=3$ или $xy=\frac{31}{3}$. Вместе с первым уравнением получаем систему для x,y. В первом случае $x=3, y=1$ или $x=1, y=3$, во втором решений нет.
Замечания по оцениванию. Если угаданы оба ответа и проведена проверка – даётся 1 балл. При наличии верного решения с приобретением каких–либо посторонних корней снимается 3 балла. При потере в процессе одного решения снимается 3 балла.

9.4. По свойству касательных, проведённых из одной точки, треугольники *AMN* и *DPQ* являются равнобедренными, поэтому прямые *MN* и *PQ* перпендикулярны биссектрисам углов *BAD* и *ADC* соответственно. Обозначим точку пересечения этих биссектрис за *S*. Сумма величин смежных углов *BAD* и *ADC* параллелограмма равна 180 градусов, поэтому сумма углов

SAD и *SDA* равна 90 градусов, следовательно, угол *ASD* тоже равен 90 градусов, то – есть биссектрисы *SA* и *SD* углов *BAD* и *ADC* перпендикулярны. Значит, прямая *MN* параллельна *SD*, а *PQ* параллельна SA, поэтому они тоже перпендикулярны.
Замечания по оцениванию. Решение в каком–либо частном случае, скажем, для прямоугольника, оценивается в 1 балл.

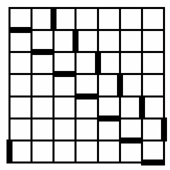
9.5. Ответ. Тогда и только тогда, когда n делится на 4.
Если n делится на 4, требуемое разбиение почти очевидно. Например, делим доску на две равных половины по вертикали, левую разбиваем на горизонтальные домино, а правую - на вертикальные. Все размеры обеих половин делятся на 2, поэтому такое разбиение возможно. Пусть n не делится на 4. Если оно нечетно, то вообще нельзя разрезать на домино 1x2. Если же $n = 4k + 2$, то горизонтальных и вертикальных домино должно быть по $\frac{n^2}{2} = 8k^2 + 8k + 2 = 4m + 2$ штук. Покрасим на горизонталях доски с нечётными номерами все клетки в чёрный цвет, а на горизонталях с чётными номерами – в белый, получив некое подобие полосатого матраса. Тогда каждое вертикальное домино будет содержать ровно одну чёрную клетку, то есть покроет $\frac{4m+2}{2} = 2m + 1$ – нечётное число клеток, а каждое горизонтальное домино – две или ноль чёрных клеток, то – есть чётное число. Общее число чёрных клеток на доске равно $\frac{n^2}{2} = 8k^2 + 8k + 2 = 4m + 2$ – чётному числу, и каждая из них содержится в некотором домино. Все горизонтальные домино в сумме содержат чётное число чёрных клеток, значит, и все вертикальные домино должны в сумме содержать чётное число чёрных клеток. Это возможно только в случае, когда общее число вертикальных домино чётно – противоречие.
Замечания по оцениванию. Верно доказано, что разрезание возможно, только когда n делится на 4 – оцениваем 5 баллами. Приведён пример такого разрезания, когда n делится на 4 – оцениваем 2 баллами.

9.6. Ответ. Максимум 35 различных чисел.
Сумма синего и красного чисел может быть натуральным числом от 1+2=3 до 19+20=39 включительно, поэтому различных не может быть больше 37. Более того, заметим, что одно из чисел 3,4,..,13 обязательно не является суммой синего и красного чисел. В противном случае, пусть число 1 синее, тогда 3 можно представить только как 1+2, поэтому 2 – красное. Число 4 представляется только как 1+3, поэтому 3 тоже красное. Далее, 5=1+4=2+3, но 2 и 3 красные, поэтому годится только первое представление, следовательно 4 тоже красное, и т.д, получаем, что все 11 чисел 2,3,..,12 – красные, а это невозможно. Аналогично показываем, что, если все числа 29,30,..,39 являются суммами синего и красного чисел, то 11 чисел 9,..,19 одного цвета. Таким образом, различных чисел может быть не более 37-2=35 штук. Один из возможных примеров, когда их ровно 35, таков: 1,11,12,..,19 – синие, 2,3,..,10,20 – красные.
Замечания по оцениванию. Только верный ответ – 0 баллов. Верный ответ и пример, когда он достигается – 3 балла. Верное доказательство максимальности числа 35 оцениваем 4 баллами. Попытки решения, где доказываются другие оценки, отличные от 35, оцениваем в 0 баллов.

Решения задач
заключительного этапа Всесибирской олимпиады школьников по математике 2009/2010 г.г.
10 класс

Общие принципы оценивания. Полное решение каждой задачи оценивается 7 баллами. При наличии неполного решения исходим из степени продвижения. Частные случаи и соображения оцениваются от 0 до 1 балла. Явно высказанная в тексте идея решения, которая может быть доведена до конца, оценивается от 2 до 3 баллов. Более или менее верное решение с существенными недочётами, типа упущения какого–то случая. оценивается от 4 до 5 баллов. Верное и полное решение с мелкими недочётами типа арифметических ошибок, оценивается 6 баллами. Верное и полное решение без каких–либо ошибок оценивается 7 баллами.
После каждой задачи приведены некоторые критерии её оценивания.

10.1. Ответ. Можно, например, так, как показано на рисунке справа.
Имеется множество других способов, достаточно привести любой из них.



Замечания по оцениванию. Любой правильный ответ оценивается в 7 баллов. Если в ответе проекции перегородок не закрывают всего один отрезок на одной из сторон, оцениваем в 1 балл. Остальное 0 баллов.

10.2. Ответ. 20 коров.
Обозначим начальный объём травы на лугу за 1, прирост травы в день – за x, количество травы, съедаемой в день одной коровой – за y. Из условия получаем систему уравнений: $1+24x=24\cdot 70y, 1+60x=60\cdot 30y$. Решая её, находим: $x=\frac{1}{480}, y=\frac{1}{1600}$. Обозначим искомое число коров за n, получим ещё одно уравнение: $1+96\cdot\frac{1}{480}=96n\cdot\frac{1}{1600}$, откуда $n=20$.

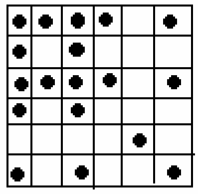
Замечания по оцениванию. Если ответ только угадан, ставим 0 баллов. Если ответ угадан и аккуратно проверена его правильность, ставим 3 балла. Правильно составлено уравнение или система, но решено с ошибками, ставим от 4 до 6 баллов в зависимости от типа ошибки. Неверно понято условие, скажем, не учтён прирост травы, ставим 0 баллов.

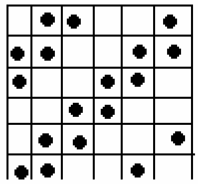
10.3. Ответ. $\frac{1}{2}$.

Преобразуем уравнение к виду: $(x+3)^2=(y-2)^2$, получим $(x+3-y+2)(x+3+y-2)=0=(x-y+5)(x+y+1)$. Следовательно, множеством точек на плоскости, координаты которых удовлетворяют исходному уравнению, является объединение прямых $y=x+5$ и $y=-x-1$. Выражение x^2+y^2 является квадратом расстояния от начала координат до точки (x,y), поэтому от нас требуется найти минимум квадрата расстояния от начала координат до точек этих прямых. Легко убедиться, что это квадрат длины перпендикуляра ко второй прямой, равный $\frac{1}{2}$ при $x=y=-\frac{1}{2}$.

Замечания по оцениванию. Если ответ только угадан, ставим 0 баллов. Если ответ угадан и указана точка, где он достигается, ставим 1 балл. В решении последний этап – подсчёт расстояния - должен быть аккуратно проведён, иначе снимаем 2 балла.

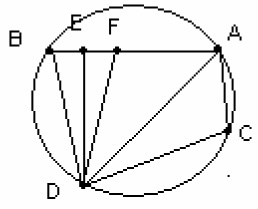
10.4. Разобьём квадрат 6 на 6 на 9 квадратов 2 на 2. Сумма всех записанных чисел, равная 666, является суммой 9 чисел, каждое из которых равно сумме чисел в одном из этих квадратов 2 на 2. Сумма 9 нечётных чисел не может быть чётной, поэтому сумма чисел в одном из квадратов 2 на 2 чётна. Приведём два возможных варианта требуемой расстановки. При этом ясно, что важна только чётность чисел, поэтому нечётным числа будут соответствовать клетки с чёрной точкой, а белым – пустые клетки.





Замечания по оцениванию. Доказательство существования квадратика 2 на 2 с чётной суммой оценивается в 4 балла, верный пример с одним таким квадратиком – в 3 балла. Пример с двумя квадратиками: 1 балл.

10.5. Биссектриса AD угла BAC делит дугу BC на равные части, поэтому $BD = DC$. Отметим на луче AB точку F так, что $AF = AC$, тогда треугольники ADC и ADF равны по двум сторонам и углу, следовательно, $DF = DC$. Значит, треугольник BDF равнобедренный, и его высота DE делит основание BF пополам. Отсюда $AE = \frac{1}{2}(AF + AB) = \frac{1}{2}(AC + AB)$, что и требовалось доказать.



Замечания по оцениванию. Если замечены некоторые верные факты, типа равенства $BD = DC$, или предприняты какие – то попытки, типа отмечена точка F и всё, можно поставить 1 балл. Заметим, что в приведённом способе решения было неважно, лежит ли точка F на отрезке AB или нет. Нужно смотреть за тем, существенно ли в решении школьника расположение F, при необходимости снимать 1 балл за нерассмотрение всех случаев.

10.6. Ответ. 6.

Обозначим количество множеств, удовлетворяющих условию, за n. Ни одно из них не содержится полностью в объединении остальных, поэтому каждое множество содержит некоторый элемент, лежащий только в нём. Все эти элементы различны и их n штук. Кроме них, остаётся ещё $11-n$ элементов, среди которых содержатся оставшиеся элементы самого большого подмножества. По условию, мощность самого большого подмножества не меньше n, следовательно, $11-n \ge n-1$, откуда $n \le 6$. Приведём пример системы из шести подмножеств, удовлетворяющих условию задачи. Пусть всё множество состоит из чисел от 1 до 11, тогда первое подмножество содержит 1, второе 2 и 7, третье 3, 7,8, четвёртое 4,7,8,9, пятое 5,7,8,9,10, шестое 6,7,8,…,11.

Замечания по оцениванию. Только верный ответ – 1 балл. Ответ и пример, когда он достигается – 3 балла. Верное доказательство максимальности числа 6 - 4 балла. Попытки решения с другим ответом оценивается в 0 баллов.

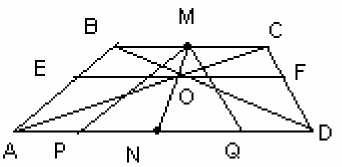
Решения задач
заключительного этапа Всесибирской олимпиады школьников по математике 2009/2010 г.г.

Общие принципы оценивания. Полное решение каждой задачи оценивается 7 баллами. При наличии неполного решения исходим из степени продвижения. Частные случаи и соображения оцениваются от 0 до 1 балла. Явно высказанная в тексте идея решения, которая может быть доведена до конца, оценивается от 2 до 3 баллов. Более или менее верное решение с существенными недочётами, типа упущения какого–то случая. оценивается от 4 до 5 баллов. Верное и полное решение с мелкими недочётами типа арифметических ошибок, оценивается 6 баллами. Верное и полное решение без каких–либо ошибок оценивается 7 баллами.
После каждой задачи приведены некоторые критерии её оценивания.

11 класс

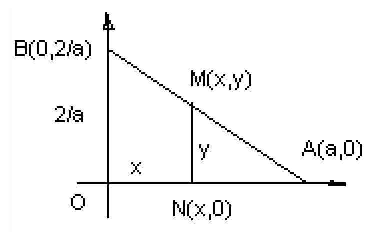
11.1. Ответ. 16 груздей, 11 рыжиков, 9 подберёзовиков**.**
Из того, что среди любых 25 из этих грибов не меньше 5 груздей, следует, что количество рыжиков и подберёзовиков вместе не превосходит 20, значит, груздей не меньше 16. Аналогично, из того, что среди любых 27 – не меньше 2 рыжиков, следует, что груздей и подберёзовиков вместе не больше 25, а рыжиков – не меньше 11. Наконец, из того, что среди любых 31 гриба не меньше 4 подберёзовиков, следует, что груздей и рыжиков вместе не больше 27, а подберёзовиков – не меньше 9. Ввиду того, что 16+11+9=36 – общему числу грибов, получим везде точное равенство.
Замечания по оцениванию. Если ответ только угадан, ставим 0 баллов. Если ответ угадан и аккуратно проверена его правильность, ставим 3 балла. Правильно составлено уравнение или система, но решено с ошибками, ставим от 4 до 6 баллов в зависимости от типа ошибки.

11.2. Ответ. 16 см**.**



Обозначим вершины трапеции за *ABCD*, середины оснований за *M* и *N*, отрезок, проходящий через точку пересечения диагоналей трапеции параллельно её основаниям с концами на боковых сторонах за *EF*. Проведём через *M* отрезки *MP* и *MQ* параллельно боковым сторонам трапеции, из условия получим, что треугольник *PMQ* – прямоугольный с медианой *MN* и гипотенузой *PQ*, равной разности *AD* и *BC*. По свойству медианы прямоугольного треугольника, проведённой к гипотенузе, длина *MN* равна половине *PQ*, следовательно, полуразность оснований трапеции равна 6 см. Учитывая, что полусумма оснований равна средней линии, то – есть 18 см, находим длины оснований: *AD=24, BC=12.* Из подобия треугольников *AOD* и *BOC* получаем *AO:OC=2:1*, поэтому длины отрезков *EO* и *OF* равны $\frac{2}{3}BC = 8$ см, следовательно, длина *EF* равна 16 см.
Замечания по оцениванию. Если ответ только угадан, ставим 0 баллов. Верно найдены основания трапеции – оцениваем 3 баллами. Возможные ссылки на готовую формулу вычисления *EF* по *AD* и *BC* без доказательства её оценивать в 1 балл.

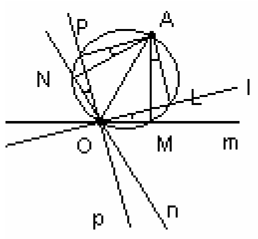
11.3. Ответ. Все точки первой четверти координатной плоскости, лежащие не выше гиперболы $y = \frac{1}{2x}$.



Пусть *M* – произвольная искомая точка, проведём через неё отрезок *AB* с концами на координатных осях такой, что площадь треугольника *AOB* равна 1, а длина *OA* равна a. Опустим из М перпендикуляр *MN* на ось *OX*. Из подобия треугольников *AOB* и *AMN* следует: $\frac{a-x}{y} = \frac{a}{2/a}$, откуда $ya^2 - 2a + 2x = 0$. Таким образом, *M* удовлетворяет условию тогда и только тогда, когда последнее квадратное уравнение относительно a имеет положительное решение. Ввиду положительности первого и отрицательности второго коэффициентов достаточно неотрицательности дискриминанта, равного $4-8xy$. Таким образом, необходимым и достаточным условием возможности проведения через точку M требуемого в условии отрезка AB является соотношение $xy \le \frac{1}{2}$.

Замечания по оцениванию. Возможно другое верное решение, когда оценивается, возможно, через производную, максимальное значение *y,* как функции от *a* при заданном *x.* Если высказана идея, вроде подобия в приведённом решении и по нему составлено похожее уравнение, но не понято, что с ним правильно делать, оцениваем в 3 балла. При решении уравнения необходимо чётко указывать в тексте на необходимость и достаточность найденного условия. При отсутствии обоснования достаточности снимаем 2 балла.

11.4. Обозначим через O точку пересечения прямых l,m,n,p. Легко заметить, что точки L,M,N,P лежат на окружности с диаметром AO. Пусть A лежит между p и l. Стороны углов LAM и LOM соответственно перпендикулярны, поэтому сами углы равны. Аналогично, равны углы PAN и PON. По условию, углы LOM и PON равны, как углы между прямыми l и m, и между n и p. Следовательно, дуги LM и PN окружности равны, значит, PL и MN параллельны. Аналогично рассматривается случай, когда A лежит между m и l.



Замечания по оцениванию. Если замечены отдельные верные факты, оцениваем следующим образом. Проведена окружность с диаметром *AO*, оцениваем в 1 балл. Если замечено равенство углов *LAM* и *LOM,* оцениваем в 1 балл. Если замечено равенство углов *LAM* и *PAN,* оцениваем в 1 балл. Замечено равенство дуг *LM* и *PN* - оцениваем в 1 балл. В ходе решения должны рассматриваться два разных варианта расположения *A* относительно прямых, внутри угла между *l* и *m* или *n* и *p*, либо внутри оставшихся углов. Если это не делается, или не объясняется, как этого избежать, снимаем 1 балл.

11.5. Ответ. *f(-1)=-1.*

Рассмотрим выражение *f(f(f(x))).* С одной стороны, оно равно *f(5x+4),* с другой - равно *5f(x)+4.* Заметим, что при *x=-1* имеем *5x+4=x,* следовательно *5f(-1)+4=f(-1),* откуда *f(-1)= =-1.*

Замечания по оцениванию. Просто угадан верный ответ – 0 балл. Задача решена в предположении, что *f(x)* – многочлен – даётся 1 балл.

11.6. Предположим противное, что существуют несколько подмножеств десятиэлементного множества, таких, что ни одно из них не содержится в объединении остальных, и сумма количеств элементов во всех этих подмножествах равна 31. Обозначим количество подмножеств, удовлетворяющих этому условию, за n. Ни одно из них не содержится полностью в объединении остальных, поэтому каждое множество содержит некоторый элемент, лежащий только в нём. Все эти элементы различны и их n штук. Кроме них, остаётся ещё $10-n$ элементов, содержащих оставшиеся элементы всех найденных подмножеств. Следовательно, все вместе эти множества содержат не более $n(10-n)+n=11n-n^2$ элементов. Максимум этого выражения достигается при $n=5$ и $n=6$ и равен 30 – противоречие.

Замечания по оцениванию. Последнее предложение должно быть доказано, иначе снимаем 1 балл.